

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، خرداد و شهریور ۹۹ و دی ۱۴۰۰ است هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان

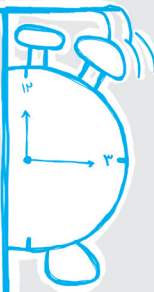
سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت، همه آن‌چه را

که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی (۳) نیاز دارید، در ۱۷ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا چهارم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس ریاضی (۳)

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول	۷	۲	۳
فصل دوم	۵	۲	۳
فصل سوم	۵	۲	۲
فصل چهارم	۳	۱	۵
	-	۴	
فصل پنجم	-	۳/۵	۳
فصل ششم	-	۳/۵	۲/۵
فصل هفتم	-	۲	۱/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

صفحه	صفحه	نوبت آزمون	پاسخ‌نامه
۲۴	۳	اول (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۱
۲۶	۵	اول (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۲
۲۸	۷	اول (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۳
۳۰	۸	اول (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۴
۳۲	۹	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۹۸
۳۴	۱۱	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۶ نهایی خرداد ۹۹
۳۵	۱۳	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۷ نهایی شهریور ۹۹
۳۷	۱۶	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۸ نهایی دی ۱۴۰۰
۳۸	۱۸	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۰
۴۰	۲۰	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۱
۴۱	۲۲	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۰
۴۲	۲۳	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۱

درس‌نامه توپ برای شب امتحان

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
فصل اول				
۱	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید:</p> <p>الف) برای دو تابع f و g با شرط آن که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست.</p> <p>ب) برد تابع $2f(x-1)$ در حالت کلی با برد تابع $f(x)$ برابر نیست.</p>			۱
۱/۵	<p>شما از سال دهم با رسم نمودارهای مختلف سر و کار داشتین. ولی آنگه بازم یادتون رفته چه طوری نمودار توابع رو رسم کنید به درس نامه آخر این کتاب به نیگما بندازین.</p>	<p>ابتدا نمودار تابع f را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$	۲	
۱/۲۵	با رسم نمودار، وضعیت یکنوایی تابع $y = 2^x - 1$ را بررسی کنید، سپس در صورت امکان، ضابطه و نمودار تابع وارون آن را به دست آورید.			۳
۱	<p style="text-align: center;">$y = f(x)$</p>	نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار توابع $y = \frac{1}{f}(2x)$ و $y = -f(-x)$ را رسم کنید.	۴	
۱	برای دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ضابطه و دامنه تابع fog را به دست آورید.			۵
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کرده سپس دامنه‌اش را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود، در نهایت با در نظر گرفتن این دامنه، ضابطه وارون f را به دست آورید.			۶
فصل دوم				
۱/۵	<p>ما مقدارهای $\sin 22/5^\circ$ و $\cos 22/5^\circ$ رو نمی‌دونیم ولی $\sin 35^\circ$ و $\cos 35^\circ$ رو بلدییم، پس از فرمول‌های PQL استفاده می‌کنیم.</p>	برای زاویه $22/5^\circ$ مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت را بدست آورید.	۷	
۱/۲۵	معادله مثلثاتی $\cos x(4\cos x - 9) = -5$ را حل کنید. جواب‌هایی را که در بازه $[0, 4\pi]$ قرار دارند، تعیین کنید.			۸
۰/۲۵	در جای خالی، عبارت مناسب قرار دهید:			۹
۱		نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.	۱۰	
۱	مثلثی با مساحت ۹ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۱۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟			۱۱
فصل سوم				
۲/۵	<p>در معادله‌ها توابع کسری، اگر صورت کسر، عددی غیر صفر و مخرج کسر صفر شد باید نوع صفر رو تعیین کنید یعنی باید ببینید مخرج $+$ می‌شود یا $-$.</p>	<p>حاصل حدود زیر را به دست آورید:</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}$</p> <p>ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 9t^3}{t^2 + 2t}$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{(x-1)^3}$</p>	۱۲	

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: علوم تجربی	ریاضی (۳)
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم			ردیف
۱	<p>با توجه به جدول زیر می توان گفت:</p> <p>الف) حد تابع f وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر است با</p> <p>ب) حد f وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است با</p>			۱۳
۱/۵	<p>برای هر شکل، یک عبارت حدی مناسب بنویسید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="111 504 406 705"> <p>الف) $(\text{حد در } x=2)$</p> </div> <div data-bbox="710 504 1029 705"> <p>ب) $(\text{حد در } +\infty)$</p> </div> </div>			۱۴
فصل چهارم				
۱/۵	<p>برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 2$ و $f(4) = 18$. مختصات نقاط B و C را به دست آورید.</p>			۱۵
۱/۵	<p>با فرض آن که $f(x) = -x^2 + 4x$ باشد به کمک تعریف مشتق، مقدار $f'(3)$ را به دست آورید. سپس معادله خط مماس بر نمودار $f(x)$ را در نقطه $x=3$ بنویسید.</p>			۱۶
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

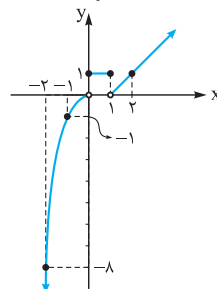
۱- الف) نادرست؛ مثلاً اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشند، با آن که $f \neq g$ ولی تساوی $f \circ g = g \circ f$ برقرار است و هر دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با هم برابر می‌شوند:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$$

ب) درست، مثلاً اگر بُرد $f(x)$ برابر با $[0, 1]$ باشد بُرد $f(x-1)$ برابر است با $[-1, 0]$. ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن، تک تک نمودارها را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:

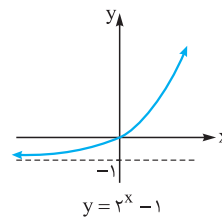
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & | & 0 & -1 & -2 \\ y & | & 0 & -1 & -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{خط افقی } y=1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & | & 1 & 2 \\ y & | & 0 & 1 \end{cases}$$



واضح است که تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, 1]$ ثابت است.

۳- با توجه به شکل مقابل، هر خط افقی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس این تابع، یک‌به‌یک است. لذا وارون‌پذیر هم می‌باشد.



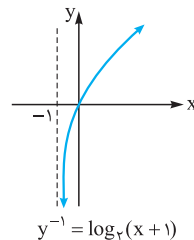
ضمناً تابع، اکیداً صعودی است.

حال برای به دست آوردن تابع وارون، باید x را بر حسب y بنویسیم. ضمناً توجه دارید که وارون تابع نمایی، یک تابع لگاریتمی است و برعکس.

$$y = 2^x - 1 \Rightarrow 2^x = y + 1$$

$$\xrightarrow[\text{از دو طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_2 2^x = \log_2 (y + 1) \Rightarrow x = \log_2 (y + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{به یکدیگر تبدیل اسم متغیرها}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} y^{-1}(x) = \log_2 (x + 1)$$



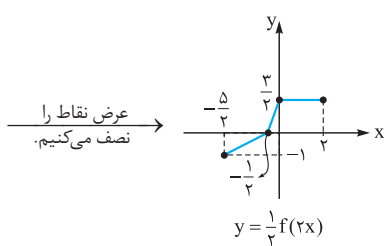
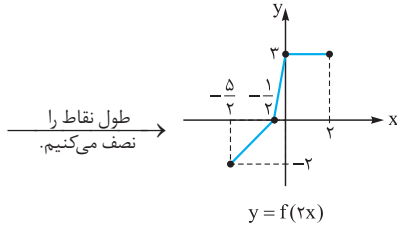
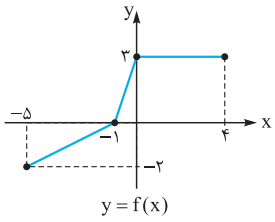
برای رسم نمودار y^{-1} باید نمودار $\log_2 x$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم:

(یا می‌توانیم قرینهٔ نمودار $y = 2^x - 1$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم).

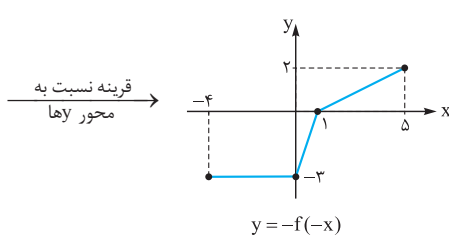
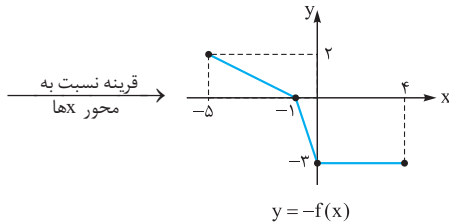
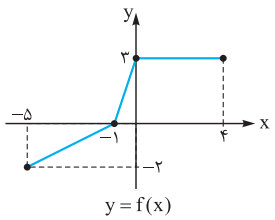
۴- دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-5, 4]$ می‌باشد. حالاً برای یافتن دامنهٔ $f(2x)$ باید طول تمام

نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی دامنهٔ تابع $f(2x)$ به صورت $[-\frac{5}{2}, \frac{4}{2}]$ خواهد بود. زیرا:

$$-5 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{5}{2} \leq x \leq 2$$



حالاً نمودار $y = -f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



۵- ابتدا دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست می‌آوریم. می‌دانید دامنهٔ توابع گویا به

شکل $\frac{\square}{\square}$ برابر است با {ریشه‌های معادلهٔ $\square = 0$ } و دامنهٔ توابع رادیکالی به

شکل $\sqrt{\square}$ برابر است با جواب نامعادلهٔ $\square \geq 0$.

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad \text{نویس} \quad \frac{\pi}{12} \quad 9-$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \frac{\pi}{12}]} x = \frac{\pi}{12}$$

۱۰- با توجه به شکل، $\max = 7$ و $\min = 1$ و همچنین دوره تناوب برابر با π است:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad \text{بنابراین:}$$

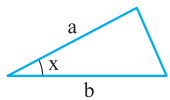
ضمناً توجه کنید که مقدار c همواره برابر است با میانگین \max و \min : لذا:

$$\max = 7, \min = 1 \Rightarrow c = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\max = |a| + c \Rightarrow |a| + 4 = 7 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

با توجه به شکل a و b هر دو باید هم علامت باشند، لذا: $a = 3$ یا $b = 2$ و $a = -3$ و $b = -2$ ، ولی ضابطه تابع در هر دو حالت به شکل $y = 3 \sin 2x + 4$ می باشد.

۱۱- اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی را داشته باشیم (مانند شکل زیر) می توانیم مساحت آن را به دست آوریم.



$$\Rightarrow \text{مساحت } S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin x$$

با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$\frac{1}{2} \times 18 \times \sin x = 9 \Rightarrow \sin x = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد، یعنی ۲ مثلث با خواص ذکر شده وجود دارند.

(۱۲- الف)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

عامل صفرشونده $(x+2)$ است؛ پس صورت و مخرج را بر $(x+2)$ تقسیم می کنیم. البته مخرج به راحتی به کمک اتحاد جمله مشترک قابل تجزیه است:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$

حالا صورت کسر را بر $x+2$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} x^2 - x^2 - x + 10 \quad | \quad x+2 \\ -(x^2 + 2x) \quad \quad \quad x^2 - 3x + 10 \\ \hline -3x^2 - x + 10 \\ -(-3x^2 - 6x) \quad \quad \quad \Delta x + 10 \\ \hline \Delta x + 10 \\ -(\Delta x + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 3x + 10)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 10}{-2+1} = \frac{15}{-1} = -15$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-9t^2}{t^2+2t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-9t^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-9}{1} = -9 \times (-\infty) = +\infty \quad \text{(ب)}$$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid \sqrt{x(1-x)} \neq \pm 1\}$$

طرفین به توان ۲
 $x(1-x) \neq 1$
 \downarrow
 $\Delta < 0$
 \downarrow
 $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, 1]$$

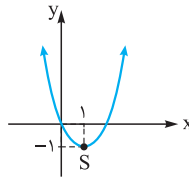
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1+g^2}{1-g^2} = \frac{1+(\sqrt{x(1-x)})^2}{1-(\sqrt{x(1-x)})^2}$$

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \quad \text{(طول رأس)} \quad 6-$$

حالا عدد به دست آمده را در تابع سهمی قرار می دهیم تا عرض رأس هم به دست آید:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{x=1} y_S = 1^2 - 2(1) = -1 \quad \text{عرض رأس}$$

پس مختصات رأس به صورت $S(1, -1)$ است.



ضمناً سهمی \min دارد، چون ضریب x^2 مثبت است:

اگر مثلاً دامنه را به صورت $[1, +\infty)$ تعریف کنیم، f

یک به یک خواهد شد که در این صورت خواهیم داشت:

$$y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y+1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm \sqrt{y+1} \xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+1} \xrightarrow{\text{تبدیل اسم متغیرها به یکدیگر}} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

۷- نسبت های مثلثاتی $22/5^\circ$ را نمی دانیم ولی نسبت های مثلثاتی ۲ برابر آن یعنی 44° را می دانیم لذا از فرمول های 2α استفاده می کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} \cos 44^\circ = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می گیریم}} \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = 1 - \sin^2 22/5^\circ = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22/5^\circ = \frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$4 \cos^2 x - 9 \cos x + 5 = 0 \quad 8-$$

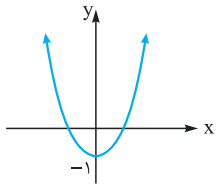
با فرض $\cos x = t$ خواهیم داشت: $\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1$

$$\Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(4)} = \frac{9 \pm 1}{8} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} > 1 \text{ غلط} \\ t = \frac{8}{8} = 1 \end{cases}$$

(کسینوس یک زاویه نمی تواند بزرگتر از ۱ باشد.)

$$t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \quad \begin{cases} k=0 \rightarrow x = 0 \in [0, 4\pi] \\ k=1 \rightarrow x = 2\pi \in [0, 4\pi] \\ k=2 \rightarrow x = 4\pi \in [0, 4\pi] \end{cases}$$

توضیح: برای رسم نمودار تابع $y = x^2 - 1$ باید نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به پایین حرکت دهیم.



تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است. \Rightarrow

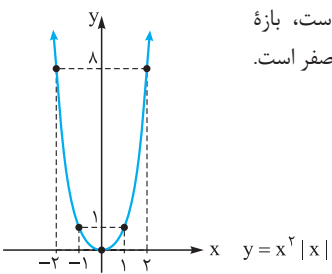
$$-2 \leq 2x \leq 1 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

(پ) $[-1, \frac{1}{2}]$ زیرا:

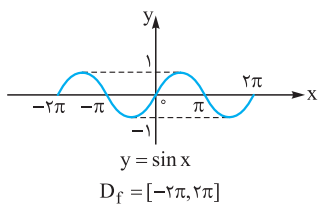
$$\Rightarrow \text{دامنهٔ تابع مطلوب} = [-1, \frac{1}{2}]$$

$$y = x^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{ریشهٔ داخل } x=0 \\ \uparrow \\ y = x^2 \quad | \quad x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

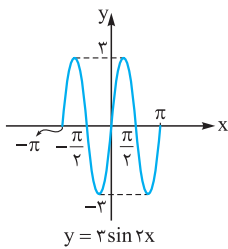
$x \geq 0 \Rightarrow$	$\frac{x}{y} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
$x < 0 \Rightarrow$	$\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$



وسیع‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است، بازه $(-\infty, 0]$ می‌باشد. لذا حداکثر مقدار a برابر صفر است.

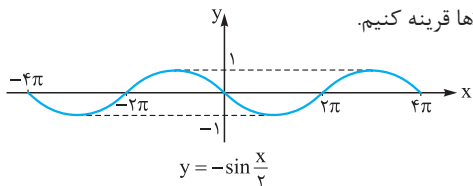


۳- ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به کمک قوانین انتقال نمودارهای مطلوب را رسم می‌کنیم:

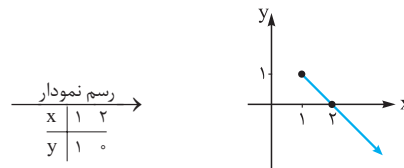


طول نقاط را نصف و عرض نقاط را سه برابر می‌کنیم.

برای رسم نمودار $y = -\sin \frac{x}{2}$ باید طول نقاط نمودار $y = \sin x$ را ۲ برابر کرده و نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم.



۴- چون $x \geq 1$ است؛ پس حاصل $(x-1)$ همواره نامنفی است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود؛ پس:



با توجه به شکل، هر خط افقی که رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. حال ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - y \xrightarrow{\frac{x \rightarrow y}{y \rightarrow x}} f^{-1}(x) = 2 - x$$

(پ) اگر به جای x ها ۱ بگذاریم، مخرج کسر صفر می‌شود، لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{4(1)}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{(x-1)^2} = \frac{4(1)}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۱۳- به جای x در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ اعداد داده شده را جایگزین می‌کنیم تا ببینیم مقادیر تابع به سمت چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	0	100	$1000 \rightarrow$	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	0	$\leftarrow -0/001$	$-0/01$	تعریف نشده	$0/01$	$0/001 \rightarrow$	0

پس نتیجه می‌گیریم که:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

۱۴- الف) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط تابع f از هر عدد

مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، لذا: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

ب) وقتی x به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع g به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر

می‌شوند، لذا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

۱۵- در نقطه A خط بر منحنی تابع مماس است، لذا $f'(4)$ همان شیب خط مماس است، مختصات نقطه A هم که به شکل $(4, 18)$ می‌باشد، لذا ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \xrightarrow{\substack{A(4, 18) \\ m=2}} y - 18 = 2(x - 4)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 8 + 18 \Rightarrow y = 2x + 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow y = 2(3) + 10 = 16 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 3 \\ 16 \end{vmatrix} \\ x=5 \rightarrow y = 2(5) + 10 = 20 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 5 \\ 20 \end{vmatrix} \end{cases}$$

۱۶- $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - 4x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-3)(x-1)}{x-2} = -2$$

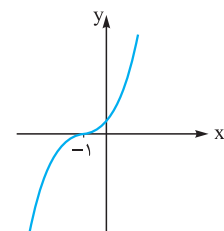
حالا به کمک $A(3, 3)$ و $m = -2$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 3)$$

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف) چهارم

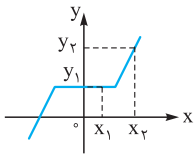
توضیح: برای رسم نمودار $y = (x+1)^3$ باید نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم.



نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد. \Rightarrow

ب) اکیداً نزولی

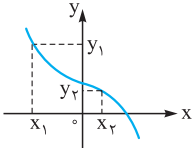
درس نامه توپ برای شب امتحان



حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

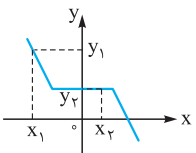
$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \geq y_1$$

اکنون به کمک تعاریف قبل، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.



$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$$

شکل (۱)



$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 \leq y_1$$

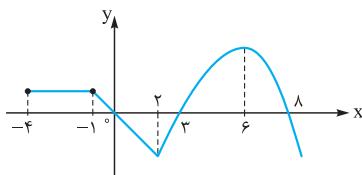
شکل (۲)

پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y = k$ می‌باشد. ($k \in \mathbb{R}$)

یکتا کردن تابع با محدود کردن دامنه

ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنه خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛



مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازه $[-4, -1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-1, 2]$ و $[6, \infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[2, 6]$ اکیداً صعودی است. ولی در کل دامنه خود $[-4, +\infty)$ نه صعودی است نه نزولی.

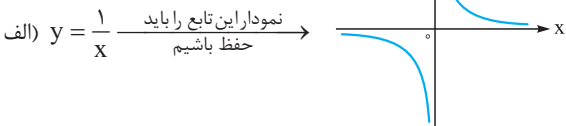
مثال: توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (فردار ۹۰)

الف) $y = \frac{1}{x}$ ب) $y = -\frac{1}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

پاسخ

نمودار این تابع را باید حفظ باشیم



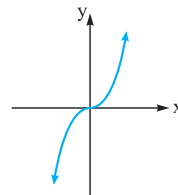
تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

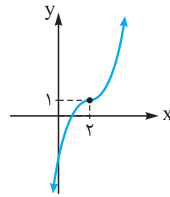
توابع چند جمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجه n نام دارد. (n عدد صحیح نامنفی و $a \neq 0$ است). مثلاً تابع $f(x) = 5x^4 - 8x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۴ است.

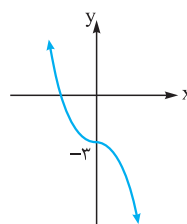


تابع درجه ۳: تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع درجه ۳ است ($a \neq 0$). البته در کتاب درسی، تابع $y = x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است: $\mathbb{R} = \text{دامنه}$ ، $\mathbb{R} = \text{بردار}$

مثال: نمودار توابع $y_1 = (x-2)^3 + 1$ و $y_2 = -x^3 - 3$ را به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کنید.



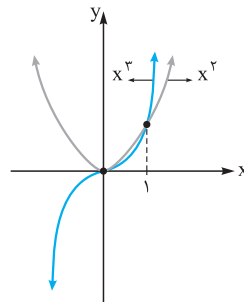
پاسخ: برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



برای رسم نمودار y_2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

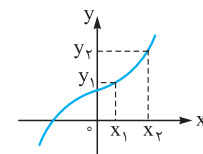
مقایسه نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$

می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ‌تر از x^3 است، پس در بازه $(0, 1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیه x های مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.



در x های منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است، پس نمودار x^2 بالاتر است.

توابع یکتا (صعودی یا نزولی)



در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$$

پ) $(\frac{g \circ f}{f \circ g})(0) = \frac{(g \circ f)(0)}{f(0) - g(0)} = \frac{g(f(0))}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$

به دست آوردن $g(x)$ با داشتن $f(x)$ و $(f \circ g)(x)$

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای x ها قرار می‌دهیم تا $f \circ g$ به دست آید. سپس جواب آن را با $f \circ g$ که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

(فرداد ۸۷)

پاسخ: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{1+g(x)} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow x g(x) = 1 + g(x) \Rightarrow \frac{x g(x) - g(x)}{g(x)} = 1$
فاکتوراز $g(x)$

$\Rightarrow g(x)(x-1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$

به دست آوردن $f(x)$ با داشتن $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x) = t$ ، سپس از این رابطه x را بر حسب t پیدا کرده و در رابطه $f \circ g$ که به ما داده شده قرار می‌دهیم. در نهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال: اگر $g(x) = 2x - 6$ و $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 7x$ ، آن‌گاه تابع $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(2x-6) = 3x^2 - 7x$

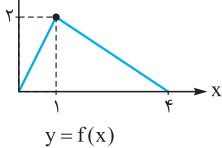
$2x - 6 = t \Rightarrow 2x = t + 6 \Rightarrow x = \frac{t+6}{2}$

$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t) = 3(\frac{t+6}{2})^2 - 7(\frac{t+6}{2})$

$\xrightarrow{\text{تبدیل } t \text{ به } x} f(x) = 3(\frac{x+6}{2})^2 - 7(\frac{x+6}{2})$

انتقال و تبدیل نمودارها

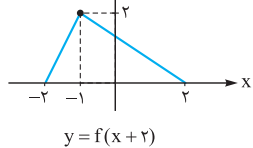
نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:



۱) برای رسم نمودار $y = f(x+k)$:

● اگر $k > 0$ نمودار را k واحد به سمت چپ می‌بریم.

● اگر $k < 0$ نمودار را k واحد به سمت راست می‌بریم.

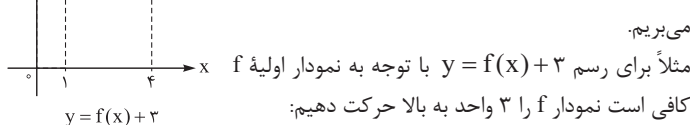


مثلاً برای رسم تابع $y = f(x+2)$ ، نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم.

۲) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$:

● اگر $k > 0$ نمودار را k واحد به سمت بالا می‌بریم.

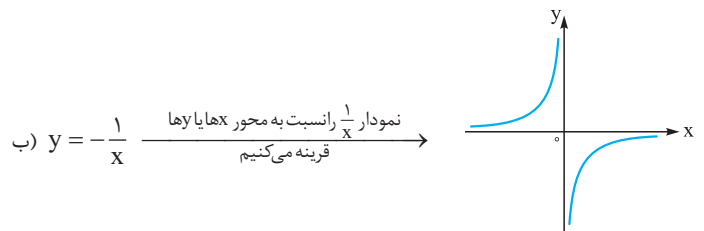
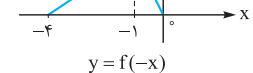
● اگر $k < 0$ نمودار را k واحد به سمت پایین می‌بریم.



مثلاً برای رسم $y = f(x) + 3$ با توجه به نمودار اولیه f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم.

۳) برای رسم $y = f(-x)$ کافی است نمودار f را

نسبت به محور y ها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):



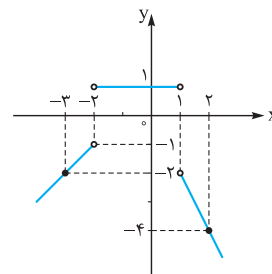
ب) نمودار $\frac{1}{x}$ را نسبت به محور x ها یا y ها قرینه می‌کنیم $y = -\frac{1}{x}$

تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

پ) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$

x	-2	-3
y	-1	-2

x	1	2
y	-2	-4



پس تابع f در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی، در بازه $(-2, 1)$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) و در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای $f \circ g$ و $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

مثال: اگر $f = \{(3, 4), (7, 8), (5, 2)\}$ و $g = \{(1, 3), (-2, 7), (5, 9)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

(فرداد ۸۹)

$\left. \begin{aligned} 1 &\xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ -2 &\xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8 \\ 5 &\xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(1, 4), (-2, 8)\}$
دقت کنید ۹ در دامنه f نیست!

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای $f \circ g$ می‌توان گفت:

$(f \circ g)(1) = 4$, $(f \circ g)(-2) = 8$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض‌اند. الف) دامنه توابع

f و $g \circ f$ را تعیین کنید. ب) ضابطه $g \circ f$ را بیابید. پ) $(\frac{g \circ f}{f \circ g})(0)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ تعیین دامنه $\rightarrow 4-x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ تعیین دامنه $\rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = [-2, 2] - \{\pm\sqrt{3}\}$
 $\sqrt{4-x^2} \neq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x \neq \pm\sqrt{3}$

ب) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{\sqrt{4-x^2} - 1}$