

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان هندسه (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌هایی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، خرداد ۹۹، شهریور ۹۹ و دی ۱۴۰۰ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال

مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱ است.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما

برای گرفتن نمره عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بازم‌بندی درس هندسه (۳)

| شماره فصل | نوبت اول | نوبت دوم | شهریور و دی |
|-----------|----------|----------|-------------|
| فصل اول | ۱۰ | ۴ | ۶ |
| فصل دوم | ۱۰ | ۳ | ۸ |
| | - | ۵ | |
| فصل سوم | - | ۸ | ۶ |
| جمع | ۲۰ | ۲۰ | ۲۰ |

صفحه صفحه

نوبت آزمون پاسخ‌نامه

| | | | | |
|----------------------------------|------------------|-----|----|----|
| آزمون شماره ۱ | (طبقه‌بندی شده) | اول | ۳ | ۲۳ |
| آزمون شماره ۲ | (طبقه‌بندی شده) | اول | ۴ | ۲۴ |
| آزمون شماره ۳ | (طبقه‌بندی نشده) | اول | ۵ | ۲۶ |
| آزمون شماره ۴ | (طبقه‌بندی نشده) | اول | ۶ | ۲۷ |
| آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۹۸ | (طبقه‌بندی شده) | دوم | ۷ | ۲۹ |
| آزمون شماره ۶ نهایی خرداد ۹۹ | (طبقه‌بندی شده) | دوم | ۹ | ۳۰ |
| آزمون شماره ۷ نهایی شهریور ۹۹ | (طبقه‌بندی شده) | دوم | ۱۱ | ۳۲ |
| آزمون شماره ۸ نهایی دی ۱۴۰۰ | (طبقه‌بندی شده) | دوم | ۱۳ | ۳۳ |
| آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۰ | (طبقه‌بندی نشده) | دوم | ۱۵ | ۳۴ |
| آزمون شماره ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۱ | (طبقه‌بندی نشده) | دوم | ۱۷ | ۳۵ |
| آزمون شماره ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۰ | (طبقه‌بندی نشده) | دوم | ۱۹ | ۳۷ |
| آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۱ | (طبقه‌بندی نشده) | دوم | ۲۱ | ۳۸ |

| هندسه (۳) | رشته: ریاضی و فیزیک | مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه | kheilisabz.com | خبرنگار |
|----------------|--|----------------------|---|---------|
| ردیف | آزمون شماره ۱ | | | نمره |
| فصل اول | | | | |
| ۱ | جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، آن گاه $(A^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$. | ۰/۲۵ | | |
| ۲ | درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر A ، B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند آن گاه $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$. ب) اتحادهای جبری دربارهٔ ماتریس‌ها برقرار هستند. پ) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آن گاه $ BA = AB = A B $. | ۱ | | |
| ۳ | ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = 2i + 3j$ را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی را بیابید. | ۱ | با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی. | |
| ۴ | اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $A^2 - 4A - 5I_3 = \bar{O}$. | ۱/۵ | هواست باشه I_3 یعنی $I_{3 \times 3}$. | |
| ۵ | دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$. | ۱/۵ | دقت کن که باید تمام درایه‌های ماتریس AB صفر شوند. | |
| ۶ | اگر A یک ماتریس وارون پذیر از مرتبهٔ 2×2 باشد و $ A = -2$ ، آن گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $ A^4 - 4 A^{-1} + 3$ | ۱ | دقت کن ضریب ۳ بیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان. | |
| ۷ | اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $5A^{-1} + B^{-1}$ را به دست آورید. | ۱/۲۵ | ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است. | |
| ۸ | دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار بر حسب ستون اول محاسبه کنید. | ۱/۵ | هواست باشه حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود. | |
| ۹ | مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ ax - y = 2a \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد. | ۱ | بی‌شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق بودن دو خط. | |
| فصل دوم | | | | |
| ۱۰ | جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ب) رابطهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر پ) اگر در معادلهٔ تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta > 0$ ، آن گاه خط و دایره | ۰/۷۵ | | |
| ۱۱ | یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. | ۰/۷۵ | دقت کن که صفحهٔ P از رأس مخروط نگذشته. | |
| ۱۲ | مکان هندسی مورد نظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ثابت ۱ واحد باشند.» | ۰/۷۵ | خط L از طرفین نامحدود است. | |
| ۱۳ | خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ L واحد باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث کنید). | ۱/۵ | | |
| ۱۴ | الف) دایره به معادلهٔ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ را رسم کنید. ب) مساحت این دایره چه قدر است؟ | ۱/۵ | برای مناسبهٔ مساحت دایره فقط به شعاع نیاز داری. | |
| ۱۵ | به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ را بیابید. | ۱/۵ | راه حل تشریحی لازمه ته استفاده از فرمول. | |
| ۱۶ | مقدار a را چنان بیابید که خط $y + 3x = a$ بر دایرهٔ $2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 0$ مماس باشد. | ۱/۵ | به ضریب ۲ برای x^2 و y^2 دقت کن. | |
| ۱۷ | وضعیت دو دایرهٔ روبه‌رو را نسبت به هم بررسی کنید. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ | ۱/۷۵ | | |
| ۲۰ | جمع نمرات | موفق باشید | | |

| شماره | kheilisabz.com | مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه | رشته: ریاضی و فیزیک | هندسه (۳) |
|-------|--|----------------------|---------------------|--|
| ردیف | آزمون شماره ۱۵ | | | نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱ |
| ۱ | <p>عبارت‌های زیر را کامل کنید.</p> <p>الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با است.</p> <p>ب) اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به نزدیک‌تر می‌شود.</p> <p>پ) نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد.</p> <p>ت) اگر سه بردار \vec{a}، \vec{b} و \vec{c} در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر است.</p> | | | |
| ۱/۵ | <p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.</p> <p>الف) اگر A یک ماتریس 3×3 و $A = 5$ باشد، آن‌گاه $2A = 40$ است.</p> <p>ب) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.</p> <p>پ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $\widehat{FMF'} = 50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است.</p> <p>ت) برای دو بردار واحد \vec{i} و \vec{j}، حاصل ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{0}$ است.</p> | | | |
| ۱ | <p>۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.</p> | | | |
| ۱/۲۵ | <p>۴ ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $\begin{cases} \vec{i} + \vec{j} & i = j \\ \vec{j} & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$ و $a_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد،</p> <p>الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.</p> <p>ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.</p> | | | |
| ۱/۲۵ | <p>۵ دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.</p> | | | |
| ۱/۵ | <p>۶ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).</p> | | | |
| ۱ | <p>۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(1, -1)$ و بر خط $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.</p> | | | |
| ۱/۵ | <p>۸ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرهای برابر 10° و 6° است،</p> <p>الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.</p> <p>ب) مختصات کانون‌ها (F', F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A', A) و دو سر قطر کوچک (B', B) را به دست آورید.</p> <p>پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.</p> | | | |
| ۱/۵ | <p>۹ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ را بیابید.</p> <p>ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.</p> | | | |
| ۱/۲۵ | <p>۱۰ در شکل روبه‌رو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.</p> <p>ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$</p> | | | |
| ۰/۵ | <p>۱۱ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 2$ را رسم کنید.</p> | | | |

| شماره | kheilisabz.com | مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه | رشته: ریاضی و فیزیک | هندسه (۳) | |
|-------|--|---|---------------------|------------|--|
| نمره | نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱ | | | ردیف | |
| ۱/۵ | | <p>۱۲ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.</p> $x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ <p>ب) معادلات مربوط به پاره خط (بال) AD را بنویسید.</p> <p>پ) مختصات نقطه D را بنویسید.</p> <p>ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xOz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.</p> | | | |
| ۱/۷۵ | <p>۱۳ سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0, 2, 1)$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر با θ باشد، $\cos \theta$ را بیابید.</p> <p>ب) تصویر قائم بردار \vec{a} بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.</p> | | | | |
| ۱ | <p>۱۴ دو بردار \vec{a} و \vec{b} مفروض‌اند به طوری که $\vec{a} = 6$ و $\vec{b} = 4$ و زاویه بین آن‌ها 30° درجه است، مقدار عبارت $\vec{a} \times \vec{b}$ را محاسبه کنید.</p> | | | | |
| ۱/۵ | <p>۱۵ اگر $A = (2, -1, 3)$، $B = (3, 1, 4)$ و $C = (-1, 1, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.</p> | | | | |
| ۱ | <p>۱۶ برای دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} ثابت کنید دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.</p> | | | | |
| ۲۰ | جمع نمرات | | | موفق باشید | |

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

۵- برای دو ماتریس غیرصفر حاصل ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

یعنی ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر بشود.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^f| = |A|^f$. هم‌چنین $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه: $|A^f| - 4|A^{-1}| + 3 = |A|^f - 4 \times \frac{1}{|A|} + 3$

$$= (-2)^f - 4 \times \frac{1}{-2} + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$$

۷- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Delta A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع نظریه نظیر درایه‌ها}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

۸- ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (+2 + 60 + 70) - (-28 + 15 - 20) = 132 - (-33) = 132 + 33 = 165$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = -13 + 90 + 88 = 165$$

۹- برای این که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند

$$\frac{2}{a} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2a} \quad \text{یعنی:}$$

$$3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

از حل تناسب اول داریم:

با جای گذاری $a = -\frac{2}{3}$ ، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{2}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2(-\frac{2}{3})} \Rightarrow -3 = -3 = -3$$

بنابراین به ازای $a = -\frac{2}{3}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین

کسرها برقرار نمی‌شد، آن‌گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a ، دارای بی‌شمار جواب نبود.)

۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

ب) $a^2 + b^2 > 4c$

پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

A-۱

۲- الف) درست. خاصیت توزیع پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست. زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست. زیرا $|A| = 12 - 12 = 0$. می‌دانیم شرط وارون پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

ت) درست. دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شماره سطر و j شماره ستون است. $1 \leq i, j \leq 3$.

$$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5$$

$$a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8$$

$$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11$$

$$a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7$$

$$a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10$$

$$a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13$$

$$a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$$

$$a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$$

$$a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 15 = 30$$

روی قطر اصلی یعنی:

۴- A^2 یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

۴A یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I_3 \text{ ماتریس همانی مرتبه } 3 \times 3, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ است و } \Delta I_3 \text{ برابر است با } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - \Delta I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیر به نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^2 - 4A - \Delta I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r-a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ r-a = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{2} \end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایره اول:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

قرینه نصف ضریب x و ضریب y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O = \left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4+16+4} = \sqrt{6}$$

هم‌چنین شعاع دایره اول برابر است با:

$$O' \left(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-2, -1)$$

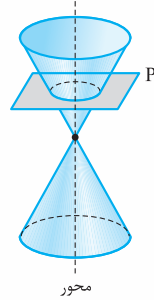
برای دایره دوم نیز داریم:

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{16+4-4} = 2$$

اکنون طول پاره خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

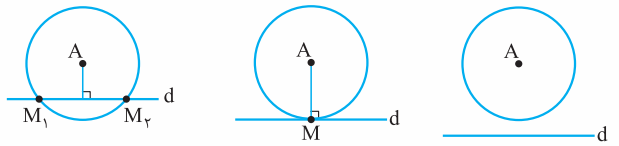
$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$$

چون $\sqrt{6} - 2 < \sqrt{10} < \sqrt{6} + 2$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصله ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند.

۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطه تماس، نقطه مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.



(مسئله جواب ندارد) (M تنها جواب مسئله است) (M_1 و M_2 دو جواب مسئله هستند).

۱۴- الف) ابتدا معادله دایره را استاندارد می‌کنیم، در پراونت دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$4(x-1)^2 + 4(y+\frac{1}{2})^2 = 1 \xrightarrow{\div 4} (x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

ریشه داخل پراونت‌ها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.

$$O(1, -\frac{1}{2}), R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

۱۵- x ها را کنار هم و y ها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پراونت را مربع کامل می‌کنیم:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 + 2x + 1) - 1}_{\text{اتحاد}} + \underbrace{(y^2 - 4y + 4) - 4}_{\text{اتحاد}} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

ریشه داخل پراونت‌ها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left. \begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 &\Rightarrow y=2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O(-1, 2), R = \sqrt{5}$$

۱۶- برای این که خط بر دایره مماس شود، باید فاصله خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH = R$.

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

$$O = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) = \left(-\frac{-\frac{3}{2}}{2}, -\frac{\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} - 0} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$OH = \text{فاصله مرکز دایره تا خط} = \frac{\left|2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} - a\right|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|2-a|}{\sqrt{10}}$$

باید $\frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{|2-a|}{\sqrt{10}}$ ، پس $|2-a| = \frac{10}{4}$ ؛ در نتیجه $|2-a| = \frac{5}{2}$.



آزمون شماره ۱۰ (نوبت دوم)

۱- الف) در ماتریس هماتی، درایه‌های روی قطر اصلی ۱ و خارج قطر اصلی صفر هستند
پس: $r=1, m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow m+r=1+1=2$

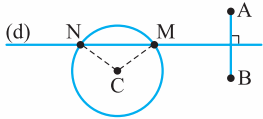
ب) دایره

پ) فاصله نقطه $A(1, -2)$ از مرکز دایره $O(1, -1)$ برابر است با: $OA = \sqrt{0+1} = 1$

و شعاع دایره نیز برابر $R = \frac{1}{4}\sqrt{4+4-0} = \sqrt{2}$ است. چون $OA < R$ پس A داخل دایره است.

ت) $V = |a.(b \times c)| = 0$

(شرط هم‌صفحه بودن سه بردار)



پ) خط d دایره را در دو نقطه M و N قطع می‌کند. (پس مسئله دو جواب دارد.)

$$\begin{aligned} MA &= MB \\ NA &= NB \\ MC &= NC = r \end{aligned}$$

۷- چون خط br دایره مماس است پس فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع است.

$$R = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{معادله دایره} \rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5 \quad (\text{الف-۸})$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

خروج از مرکز برابر است با:
(ب) چون بیضی افقی است پس:

$$A = (0 + a, 0) = (5, 0)$$

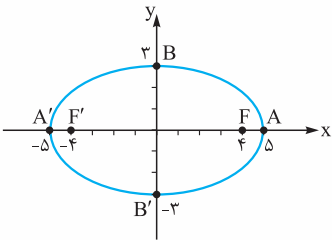
$$A' = (0 - a, 0) = (-5, 0)$$

$$B = (0, 0 + b) = (0, 3)$$

$$B' = (0, 0 - b) = (0, -3)$$

$$F = (0 + c, 0) = (4, 0)$$

$$F' = (0 - c, 0) = (-4, 0)$$



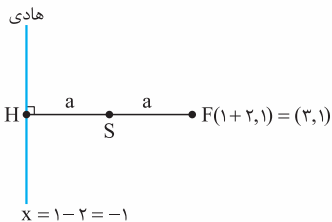
$$y^2 - 2y = 8x - 9 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 2y + 1 - 1}_{(y-1)^2} = 8x - 9 \quad (\text{الف-۹})$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 8x - 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 8(x-1)$$

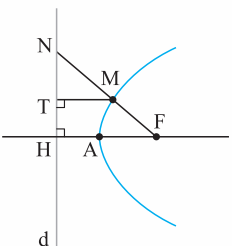
(ب) از مقایسه معادله بالا با معادله کلی سهمی افقی $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ داریم:

$$\begin{cases} h=1 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow S = (1, 1)$$

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$



چون $a > 0$ پس سهمی افقی و دهانه آن رو به راست باز می‌شود.



۱۰-

چون M روی سهمی است، پس $MT = MF$. چون A روی سهمی است، پس $AH = AF$. از طرفی چون AH و MT هر دو بر خط d عمودند پس با هم موازی‌اند.

$$\begin{cases} |2A| = 2^2 |A| = 8 \times 5 = 40 \\ A_{3 \times 3} \end{cases}$$

۲- الف) درست

(ب) درست

(پ) نادرست، طبق خاصیت بازتابندگی در بیضی، $\alpha = \beta$. چون $\widehat{FMF'} = 50^\circ$ پس:

$$\alpha + \beta + 50 = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 130 \Rightarrow \alpha = \beta = 65$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

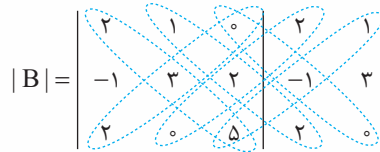
(ت) نادرست

۳- ابتدا $A \times B$ را تشکیل می‌دهیم سپس درایه‌های خارج قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8+2a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۴})$$



(ب)

$$= (2 \cdot 0 + 4 \cdot 0) - (0 \cdot 0 + 5 \cdot -1) = 3 \cdot 4 + 5 = 39$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \quad -5$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 8 - 7 = 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

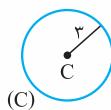
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

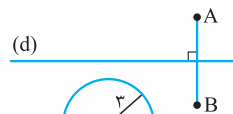


۶- مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است (d).



(C)

مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.



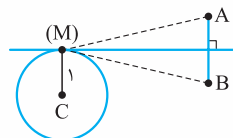
(d)

اکنون وضعیت خط d و دایره (C) را بررسی می‌کنیم: الف) خط d دایره را قطع نمی‌کند. (مسئله جواب ندارد.)



(C)

(ب) خط d بر دایره مماس است. (پس مسئله یک جواب دارد.)



$$MA = MB, MC = r$$



$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{6^2 + 0 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \xrightarrow{\substack{|\vec{a}| \neq 0 \\ |\vec{b}| \neq 0}} \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

-۱۶

قضیه تالس را در $\triangle NHF$ می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{NM}{NF} = \frac{MT}{FH} \quad (2)$$

در تساوی (۲) قرار دهیم: $MT = MF$

$$\Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MF}{FH}$$

$$\frac{NM}{MF} = \frac{NF}{FH} \quad (3)$$

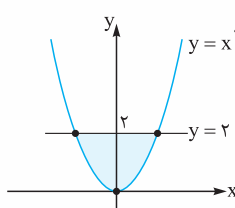
$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH}$$

$$\Rightarrow \frac{NF}{\sqrt{FA}} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{\sqrt{NT}}{TH}$$

با جابه‌جایی MF و NF داریم:

اکنون تساوی (۳) را با تساوی (۱) مقایسه کنید:

طرف چپ دو تساوی یکسان است پس:

قرار دهیم: $FH = \sqrt{FA}$ ۱۱- داخل سهمی $y = x^2$ و پایین خط $y = 2$ مد نظر است.

$$CDFG = \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

۱۲- الف)

$$AD = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

ب)

$$D = (2, 4, 3)$$

پ)

$$y = 2$$

ت)

$$\vec{a} = (2, 3, -1)$$

$$\vec{b} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{c} = (0, 2, 1)$$

۱۳-

$$\text{الف) } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2+0-1}{\sqrt{4+9+1} \times \sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{ب) } \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{b} - \vec{c}|} (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\vec{b} - \vec{c} = (1, 0, 1) - (0, 2, 1) = (1, -2, 0)$$

$$|\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (2, 3, -1) \cdot (1, -2, 0) = 2 + (-6) + 0 = -4$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \frac{-4}{\sqrt{5}} (1, -2, 0) = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$|\sqrt{2} \vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \sqrt{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{2} \times \sin 30^\circ \quad -14$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 14$$

۱۵- به کمک سه نقطه داده شده دو بردار \overline{AB} و \overline{AC} را می‌سازیم:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} = \text{انتها} - \text{ابتدا} = (3-2, 1+1, 4-3) = (1, 2, 1)$$

$$\overline{AC} = (-1-2, 1+1, 0-3) = (-3, 2, -3)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-8, 0, 8)$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

۳) ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس

مربعی مرتبه n ($n \times n$) می‌نامیم. مانند: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ یا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$.

نکته: در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شماره سطر و ستون برابر دارند ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$) را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های

مربعی بالا، به ترتیب قطرهای اصلی ۱ و ۵ هستند.

۴) ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ یا $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۵) ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ یا $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

تکلیف: در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ یا $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۶) ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با \bar{O} نشان می‌دهیم. مانند:

$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر j و i ، $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2+b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1-b & 1 \\ a+b & -1 \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیر به نظیر را برابر هم قرار دهیم: $\begin{cases} 1-b=a \Rightarrow a+b=1 \\ 1=2+b \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً: درایه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

فصل: ماتریس و کاربرد

درس: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{2} & 0/5 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

تعریف مرتبه ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$

و می‌خوانیم « A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است». مثلاً ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

یک ماتریس 3 سطری و 2 ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش 3×2 است.

نکته: نمایش کلی ماتریس A به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ است، که a_{ij} درایه واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = 2i - j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
 برای درایه a_{11} داریم: $i=1, j=1$ پس: $a_{11} = 2(1) - 1 = 1$
 برای درایه a_{12} داریم: $i=1, j=2$ پس: $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$
 و به همین ترتیب: $a_{21} = 2(2) - 1 = 3$ $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$
 $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$
 در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است:
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A = [3 \ 2 \ -1]_{1 \times 3}$

۲) ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همه درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.
 $rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A + 3B$ را به

دست آورید.

نکته: عدد 2 در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد 3 در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 3B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر $A_{m \times n}$ ، آن‌گاه قرینه ماتریس A ، از ضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

$$A + (-A) = \bar{O}$$

نکته: به کمک قرینه یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$A - B = A + (-B)$$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبه $m \times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

① $A + B = B + A$ (خاصیت جابه‌جایی)

② $A + (B + C) = (A + B) + C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

③ $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$ (عضو خنثی جمع)

④ $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$ (عضو قرینه)

⑤ $r(A \pm B) = rA \pm rB$ ⑥ $(r \pm s)A = rA \pm sA$

⑦ $A = B \Rightarrow rA = rB$ ⑧ $\begin{cases} rA = rB \\ r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$.

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r([a_{ij} \pm b_{ij}]) = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]$$

$$= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] = rA \pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$.

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}]$$

$$= r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب A در B ، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبه $m \times p$ است. نکته مهم این‌که، برای پیدا کردن درایه سطر i و ستون j حاصل ضرب AB ، باید درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظریه‌نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس BA را محاسبه کنید.

نکته: تعداد ستون‌های B (تا ۳) با تعداد سطرهای A (تا ۳) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبه ماتریس BA ، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظرش در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

مثلاً درایه سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$$1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 7$$

نکته: توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (تا ۳) با تعداد سطرهای B (تا ۲) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

① ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A \times B \neq B \times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$$A \times I = I \times A = A$$

در واقع ماتریس همانی I ، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

② ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$

③ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

نکته: دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکته مهم درباره ضرب ماتریس‌ها

① اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB = \bar{O}$ ، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال: دو ماتریس ناصفر 2×2 مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

② قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

$$\text{مثلاً اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{آن‌گاه } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ اما } B \neq C$$

نکته: توان در ماتریس؛ منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

:

نکته: اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$