ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **حسابان (۲) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ امتحان‌های نهایی برگزارشده در سال‌های ۹۸، ۹۹، ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

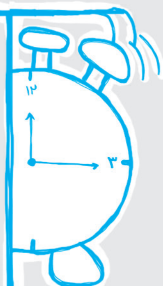
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد ۹۹، خرداد و شهریور ۹۹، دی ۱۴۰۰ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰ و خرداد ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان حسابان (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا سوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



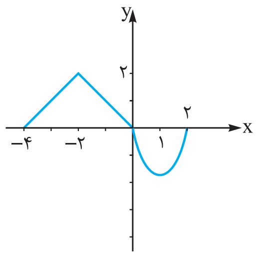
فهرست

بارم‌بندی درس حسابان (۲)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم	شهریور و دی
اول	۷	۲/۵	۳/۵
دوم	۶	۲	۳
سوم	۷	۲/۵	۳
چهارم	—	۷	۶
پنجم	—	۶	۴/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

فصل اول

۱ نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است.
نمودارهای $y_۱=-۲f(x)$ و $y_۲=-f(-\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.



ترتیب رسمِ مرحله‌به‌مرحلهٔ نمودارها برای این سؤال مهمه. — ۱/۵

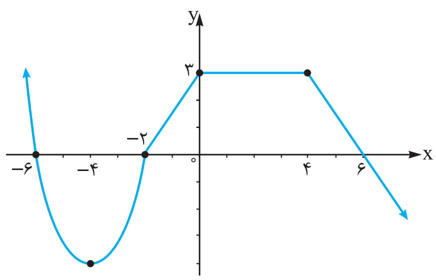
۲ جاهای خالی را تکمیل کنید.
الف) اگر نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی تابع $f(x)$ باشد، پس از انتقال، مختصات نقطهٔ A روی تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x+۱)$ برابر است با ....
ب) اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=-۳f(x-۱)$ برابر است با ....

سؤال و جواب‌های تک‌کلمه‌ای. یادت باشه برای این سؤالات فقط جواب آخر مهمه نه راه‌حل! — ۰/۵

۳ تابع $f(x)=(x+۱)^۳-۲$ را در نظر بگیرید.
الف) نمودار f را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.
ب) نشان دهید f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.
پ) ضابطهٔ $f^{-۱}$ را بنویسید.

رسم تابع f را باید فقط با انتقال‌ها انجام دهید. تابع $f^{-۱}$ هم حتماً باید به کمک f رسم شود. — ۲/۵

۴ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. بازه‌هایی که تابع در آن‌ها اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.



به کلمهٔ «اکیداً» در صورت سؤال توجه کن. — ۱

۵ نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۹x+۱۰$ بر $۲x-۵$ بخش‌پذیر است. سپس مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ را بیابید.

برای نشان‌دادن درستی قسمت اول سؤال نباید از عملیات تقسیم استفاده کنی. — ۱/۵

فصل دوم

۶ دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.
الف) $y=-\cos\frac{\pi}{۳}x+\sqrt{۲}$
ب) $y=-۲\sin۵x+۳$

این سؤال معمولاً در تمامی امتحانات مطرح می‌شود. پس فرمول‌های آن را حفظ کن. — ۱/۵

۷ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را در ربع‌های اول و چهارم با هم مقایسه کنید.

به‌وقت اشتباهی رُبع‌ها را انتخاب نکنی! — ۱

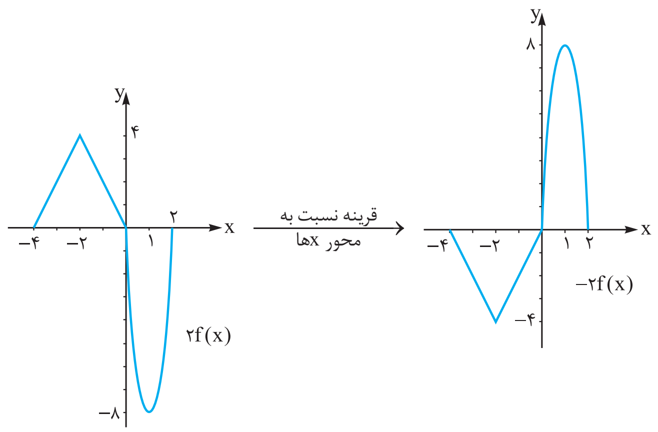
۸ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.
الف) $۲\sin x+\sqrt{۳}=۰$
ب) $۲\tan^۲x-۳\tan x+۱=۰$

برای قسمت (الف) دقت کن که سینوس برابر یک مقدار منفی می‌شود! — ۲

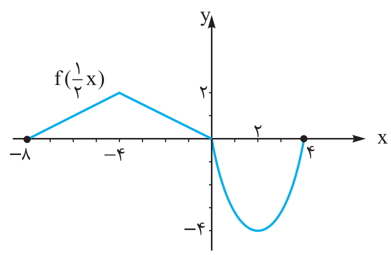
نمره			ردیف
	kheilisabz.com — مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	رشته: ریاضی‌فیزیک — حسابان (۲)	
نمره	نوبت اول پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	آزمـــون شمـــارهٔ ۱	ردیف
۱/۵	در این سؤال، اصلاً به ضلع سوم مثلث نیازی نیست.	مثلثی با مساحت ۸ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن ۴ و ۸ باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟	۹
		فصل سوم	
۲/۵	سؤال حدگیری همیشه در امتحانات مطرح می‌شود. تکنیک‌های حدگیری را از درس‌نامه بخون.	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\pi - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3}$	۱۰
۱/۵	یادت نره برای مجانب قائم، باید شرط‌هایش بررسی شود.	مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	به $\sqrt{x^2}$ توجه کن.	مجانب‌های افقی تابع روبه‌رو را بیابید. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	۱۲
۱/۵	باید نموداری بکشی که همهٔ شرط‌ها را داشته باشه. احتیاجی به ضابطهٔ نمودار نیست.	نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که: الف) $f(-1) = f(2) = 0$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ پ) خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.	۱۳
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید	

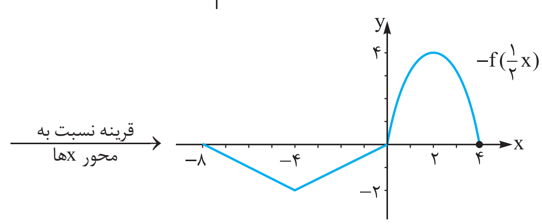
آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

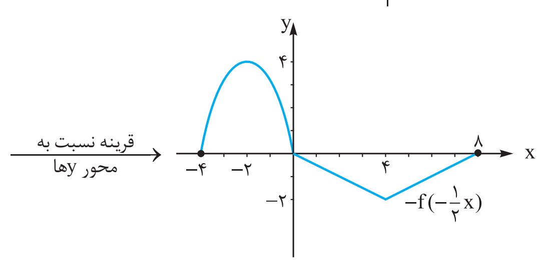
۱- برای رسم نمودار $y_۱=-۲f(x)$ ابتدا با توجه به ضریب ۲، یک انبساط عمودی در راستای محور yها انجام می‌دهیم؛ سپس به علت ضریب منفی نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



برای رسم $y_۲=-f(-\frac{۱}{۲}x)$، ابتدا با توجه به ضریب $\frac{۱}{۲}$، یک انبساط افقی در راستای محور xها انجام می‌دهیم. سپس یک‌بار قرینه نسبت به محور xها و بار دیگر قرینه نسبت به محور yها انجام می‌دهیم.







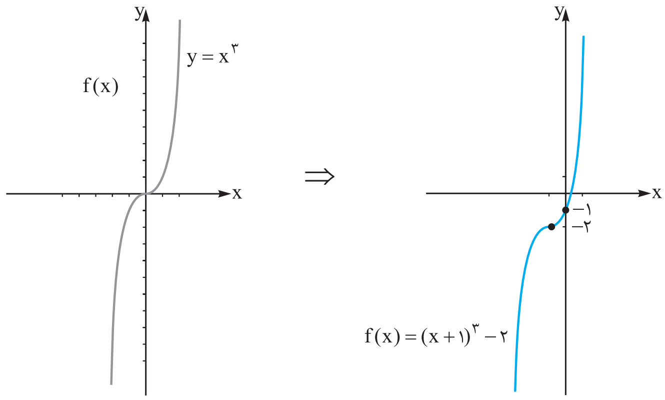
۲- الف) $(-۲,\frac{۱}{۲})$

$$A=(-۱,۱)\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{xها یک واحد}}A'=(-۲,۱)$$

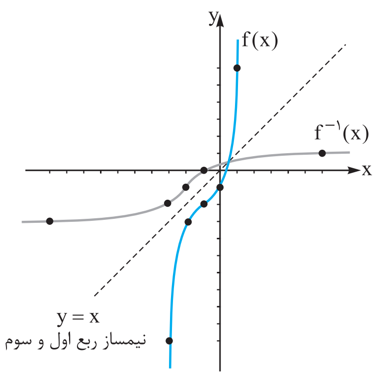
$$\xrightarrow[\text{عمودی با ضریب }\frac{۱}{۲}]{\text{yها انقباض}}A''=(-۲,\frac{۱}{۲})$$

ب) $-۱\le x-۱\le ۴\Rightarrow ۰\le x\le ۵\Rightarrow [۰,۵]$

۳- الف) ابتدا نمودار $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) چون هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است، بنابراین تابع f وارون‌پذیر است. برای رسم وارون f، باید نمودار $f(x)=(x+۱)^۳-۲$ را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم:



پ) برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=(x+۱)^۳-۲$ ابتدا باید x را تنها کنیم:

$$y=(x+۱)^۳-۲\Rightarrow y+۲=(x+۱)^۳$$

$$\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y+۲}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۲}-۱$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای x و y را عوض}}f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۲}-۱$$

۴- طبق نمودار از سمت چپ شروع می‌کنیم.

اکیداً صعودی: $[-۴,۰]$، اکیداً نزولی: $(-\infty,-۴]$

اکیداً نزولی: $[۴,+\infty)$، تابع ثابت: $[۰,۴]$

۵- باید نشان دهیم مقدار $f(x)$ به ازای ریشهٔ $۲x-۵$، برابر صفر است؛ یعنی باید نشان دهیم: $f(\frac{۵}{۲})=۰$.

$$f(\frac{۵}{۲})=۲(\frac{۵}{۲})^۳-۳(\frac{۵}{۲})^۲-۹(\frac{۵}{۲})+۱۰$$

$$=\cancel{۲}\times\frac{۱۲۵}{\underset{۴}{\cancel{۸}}}-۳\times\frac{۲۵}{۴}-\frac{۴۵}{۲}+۱۰=\frac{۱۲۵-۷۵-۹۰+۴۰}{۴}$$

$$=\frac{۱۶۵-۱۶۵}{۴}=۰\Rightarrow f(\frac{۵}{۲})=۰$$

پس $۲x-۵$ یک مقسوم‌علیه $f(x)$ است. برای پیداکردن مقسوم‌علیه‌های دیگر باید $f(x)$ را بر $۲x-۵$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳-۳x^۲-۹x+۱۰ & ۲x-۵ \\ \hline -(۲x^۳-۵x^۲) & x^۲+x-۲ \\ \quad ۲x^۲-۹x+۱۰ & \\ -(۲x^۲-۵x) & \\ \quad\quad -۴x+۱۰ & \\ \quad -(-۴x+۱۰) & \\ \quad\quad ۰ & \end{array}$$

بنابراین: $f(x)=(۲x-۵)(x^۲+x-۲)=(۲x-۵)(x+۲)(x-۱)$

یعنی $x+۲$ و $x-۱$ مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ هستند.

۶- به طور کلی دورهٔ تناوب توابعی به فرم $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a|+d$ و مقدار مینیمم $-|a|+d$ است.

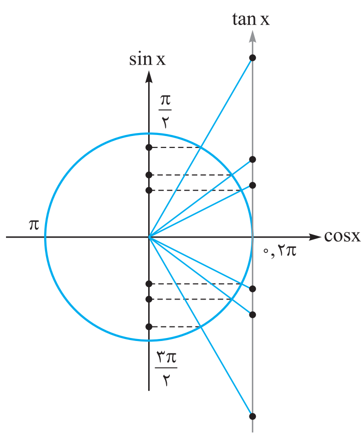
الف)

$$\begin{cases} y=-\cos\frac{\pi}{۳}x+\sqrt{۲} \\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۳}|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۶ \\ \max=|-۱|+\sqrt{۲}=۱+\sqrt{۲} \\ \min=-|-۱|+\sqrt{۲}=-۱+\sqrt{۲} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} y=-۲\sin ۵x+۳ \\ T=\frac{۲\pi}{|۵|}=\frac{۲\pi}{۵} \\ \max=|-۲|+۳=۲+۳=۵ \\ \min=-|-۲|+۳=-۲+۳=۱ \end{cases}$$

۷- دایرهٔ مثلثاتی رسم می‌کنیم:



در ربع اول: $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، طبق شکل مشخص است که همواره:

$\sin\alpha<\tan\alpha$

در ربع چهارم: $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$، طبق شکل مشخص است که همواره:

$\sin\alpha>\tan\alpha$

۸- الف) $۲\sin x+\sqrt{۳}=۰$، در نتیجه $\sin x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. زاویه‌ای که مقدار سینوس آن $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است را از ربع ۴ انتخاب می‌کنیم. $\alpha=-\frac{\pi}{۳}$.

جواب‌های کلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x=۲k\pi+(-\frac{\pi}{۳}) \\ x=(۲k+۱)\pi-(-\frac{\pi}{۳}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳} \\ x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳} \end{cases},\ (k\in\mathbb{Z})$$

ب) قرار می‌دهیم $\tan x=t$، در این صورت: $۲t^۲-۳t+۱=۰$.

مجموع ضرایب برابر صفر است، پس $t=۱$ و $t=\frac{۱}{۲}$؛ در نتیجه:

$$\tan x=۱ \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اما از معادلهٔ $\tan x=\frac{۱}{۲}$ مقدار زاویه قابل محاسبه نیست. مثلاً اگر β زاویهٔ موردنظر باشد، آن‌گاه $\tan\beta=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه: $x=k\pi+\beta\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۹- مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها عبارت است از:

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}\times$ ضلع $\times$ ضلع $\times\sin$ (زاویهٔ بین دو ضلع)

$$۸=\frac{۱}{۲}\times۴\times۸\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{۱}{۲}$$

زاویهٔ بین دو ضلع در مثلث در بازهٔ $۰<\theta<\pi$ قرار می‌گیرد، پس $\theta=\frac{\pi}{۶}$ و $\theta=\frac{۵\pi}{۶}$ قابل‌قبول هستند. یعنی دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۱۰- الف) صورت کسر فاقد x است. $x=۱$ را فقط در مخرج کسر جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱^۲-۳(۱)+۲=۰$$

با تعیین علامت مخرج کسر داریم: $x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow x=۱,۲$

x		۱		۲	
$x^۲-۳x+۲$	+	۰	−	۰	+

$x\to۱^+$ یعنی حد راست، طبق جدول برای همسایگی راست $x=۱$، مقدار $x^۲-۳x+۲$ منفی است. در نتیجه خواهیم داشت: $\lim_{x\to۱^+}\frac{\pi-۴}{x^۲-۳x+۲}=\frac{\pi-۴}{۰^-}$

اما $\pi-۴<۰$ $(\pi\simeq۳/۱۴)$، بنابراین: $\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty$

ب) از مثلثات به یاد داریم که:

$$\begin{cases} \tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin(\frac{\pi}{۲})=۱\ ,\ \cos(\frac{\pi}{۲})=۰ \end{cases}$$

پس حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\tan x$ به صورت $\frac{۱}{۰}$ خواهد بود که باید ۰^+ یا ۰^- بودن مخرج را مشخص کنیم. طبق صورت سؤال، $x\to\frac{\pi}{۲}^+$، پس با مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شویم، لذا در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی هستیم و در این ربع مقدار $\cos x$ منفی است.

در نتیجه: $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

پ) برای عبارت زیر رادیکال داریم: $\lim_{x\to+\infty}۳x^۲+۱=\lim_{x\to+\infty}۳x^۲$

در نتیجه: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۳x^۲+۱}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۳x^۲}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۳}|x|$

چون $x\to+\infty$ میل می‌کند، پس داخل قدرمطلق مثبت است و می‌توان قدرمطلق را حذف کرد. در نتیجه: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۳}|x|=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۳}x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳}x}{۲x-۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳}x}{۲x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۱- مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=-۳,x=۲$$

چون $x=۲$ و $x=-۳$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، حتماً مجانب قائم هستند. برای بررسی دقیق‌تر ابتدا مخرج را تعیین علامت می‌کنیم:

x		−۳		۲	
$x^۲+x-۶$	+	۰	−	۰	+

طبق جدول در همسایگی راست $x=۲$، مخرج مثبت است.

در نتیجه: $\lim_{x\to(۲)^+}\frac{x+۱}{x^۲+x-۶}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$

طبق جدول در همسایگی چپ $x=۲$، مخرج منفی است.

در نتیجه: $\lim_{x\to۲^-}\frac{x+۱}{x^۲+x-۶}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty$

طبق جدول در همسایگی راست $x=-۳$، مخرج منفی است.

در نتیجه: $\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{x+۱}{x^۲+x-۶}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$

طبق جدول در همسایگی چپ $x=-۳$، مخرج مثبت است.

در نتیجه: $\lim_{x\to(-۳)^-}\frac{x+۱}{x^۲+x-۶}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$

۱۲- توجه داریم که:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^۲+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^۲}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}|x|=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\end{cases}$$

اکنون حد تابع داده‌شده را یک بار وقتی $x\to+\infty$ و بار دیگر وقتی $x\to-\infty$ میل می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=۱$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-۱$$

پس $y=\pm۱$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

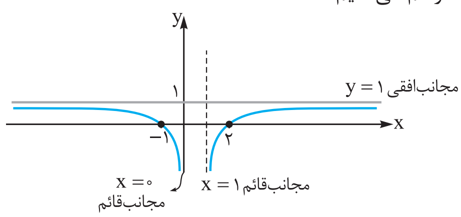
۱۳- طبق (الف)، نقاط $(-۱,۰)$ و $(۲,۰)$ روی نمودار است؛ یعنی نمودار باید محور xها را در ۱- و ۲ قطع کند.

طبق (ب)، خطوط $x=۱$ و $x=۰$ مجانب‌های قائم هستند. برای مجانب قائم $x=۱$، در همسایگی راست، مقادیر f به $-\infty$ و برای مجانب قائم $x=۰$، در همسایگی چپ، مقادیر f به $-\infty$ میل می‌کند.

طبق (پ)، خط $y=۱$ مجانب افقی تابع f است، یعنی:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۱ \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=۱$$

اکنون نموداری با این اطلاعات رسم می‌کنیم:

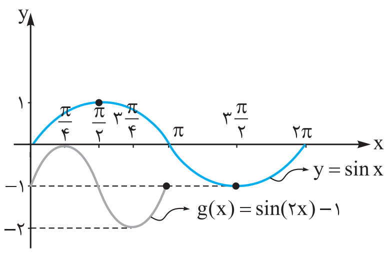


آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم:

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin x	۰	۱	۰	۱-	۰

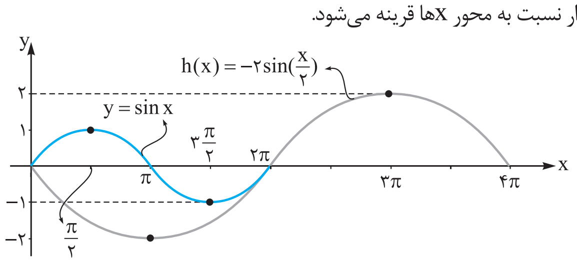
الف) برای رسم تابع $g(x)=\sin(۲x)-۱$ با توجه به ضریب ۲ برای x، یک انقباض افقی با نسبت $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها انجام می‌دهیم؛ سپس نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



$D_g=[۰,\pi]$

$R_g=[-۲,۰]$

ب) برای رسم تابع $h(x)=-۲\sin(\frac{x}{۲})$، با توجه به ضریب $\frac{۱}{۲}$ برای x، ابتدا یک انبساط افقی با نسبت ۲ در راستای محور xها داریم؛ سپس یک انبساط عمودی در راستای محور yها و در آخر نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.



$R_f=[-۲,۲]$ ، $D_h=[۰,۴\pi]$

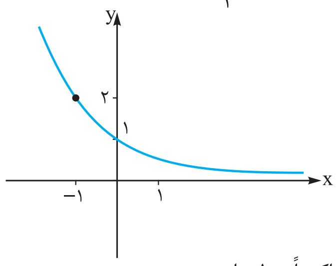
۲- الف) $[-۱,۰]$

$$R_f=[۲,۴]\Rightarrow ۲\le f(x)\le ۴$$
$$\Rightarrow ۱\le\frac{۱}{۲}f(x)\le ۲$$
$$\Rightarrow -۲\le-\frac{۱}{۲}f(x)\le -۱$$
$$\Rightarrow ۱-۲\le ۱-\frac{۱}{۲}f(x)\le ۱-۱\Rightarrow -۱\le ۱-\frac{۱}{۲}f(x)\le ۰ \Rightarrow -۱\le y\le ۰$$
$$\Rightarrow [-۱,۰]$$

ب) غیریکنوا

۳- الف) جدول مقادیر تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را تشکیل می‌دهیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

x	۱-	۰	۱
y	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$



طبق نمودار، تابع اکیداً نزولی است.

ب) در قسمت الف دیدیم که تابع $y=(\frac{۱}{۲})x$ نزولی است. طبق تعریف تابع نزولی: اگر $x_۱\ge x_۲$ باشد، آن‌گاه $f(x_۱)\le f(x_۲)$، در نتیجه:

$$(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱}\le\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^{۲x+۱}\le(\frac{۱}{۲})^۷\Rightarrow ۲x+۱\ge ۷$$
$$\Rightarrow ۲x\ge ۶\Rightarrow x\ge ۳$$

۴- چون $x^۲-x-۶$ از درجهٔ ۲ است، پس درجهٔ باقی‌ماندہ باید کم‌تر از ۲ باشد. بنابراین فرض می‌کنیم: $R(x)=ax+b$

اما طبق فرض باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۲$ و $x-۳$ به ترتیب ۱ و ۲ است. در نتیجه: $f(-۲)=۱$ و $f(۳)=۲$. اکنون داریم:

$$f(x)=(x^۲-x-۶)q(x)+\overbrace{(ax+b)}^{R(x)}$$
$$f(x)=(x+۲)(x-۳)q(x)+(ax+b)$$
$$\xrightarrow{x=-۲} ۱=۰+(-۲)a+b\Rightarrow -۲a+b=۱$$
$$\xrightarrow{x=۳} ۲=۰+۳a+b\Rightarrow ۳a+b=۲$$

با حل دستگاه $\begin{cases}-۲a+b=۱\\ ۳a+b=۲\end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases}a=\frac{۱}{۵}\\ b=\frac{۷}{۵}\end{cases}\Rightarrow R(x)=\frac{۱}{۵}x+\frac{۷}{۵}$$

۵- به طور کلی دورهٔ تناوب توابع به فرم $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a|+d$ و مقدار مینیمم $-|a|+d$ است.

الف)
$$\begin{cases}y=\sqrt{۳}+\sin\frac{۳x}{۲}\\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{۳}{۲}|}=\frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}\\ \max=|۱|+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۳}\ ,\ \min=-|۱|+\sqrt{۳}=-۱+\sqrt{۳}\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}y=۲-\cos\frac{۴x}{۳}\\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{۴}{۳}|}=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}\\ \max=|-۱|+۲=۱+۲=۳\\ \min=-|-۱|+۲=-۱+۲=۱\end{cases}$$

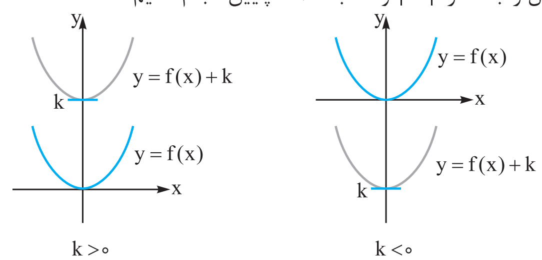
درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

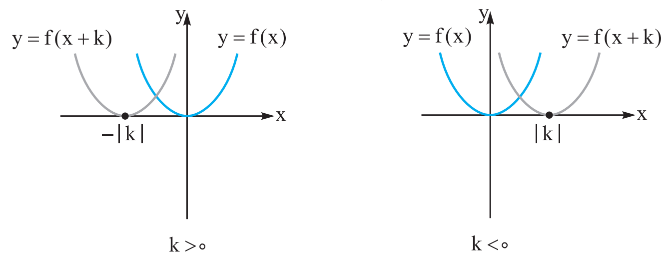
انتقال‌های عمودی و افقی

انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، باید نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا ببریم. اما اگر $k<0$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت پایین انجام دهیم.



نکته: در انتقال عمودی دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند و فقط بُرد آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

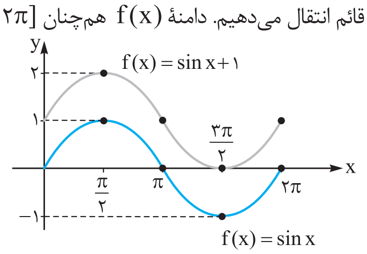
انتقال افقی: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ ببریم. اما اگر $k<0$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام دهیم.



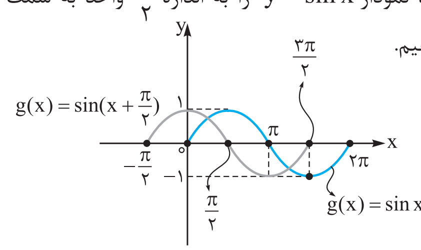
نکته: در انتقال افقی بُرد تابع تغییری نمی‌کند و فقط دامنهٔ آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

مثال: نمودار توابع $f(x)=\sin x+1$ و $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ را با توجه به نمودار $y=\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ: برای تابع $f(x)=\sin x+1$، نمودار $y=\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ را یک واحد به سمت بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم. دامنهٔ $f(x)$ همچنان $[0,2\pi]$ باقی می‌ماند.



برای تابع $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$، نمودار $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت چپ در راستای افقی انتقال می‌دهیم.



$$D_{g(x)}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

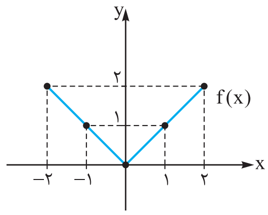
مثال: نمودار تابع $f(x)=|x|$ را با دامنهٔ $[-2,2]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. سپس نمودار توابع $g(x)=f(x-1)$ و $h(x)=f(x)-1$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

پاسخ:

$f(x)=|x|$

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۲	۱	۰	۱	۲

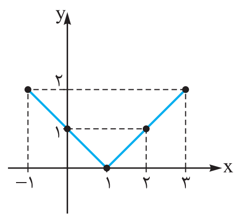
$\text{برد}\ f=[0,2]$



برای رسم تابع $g(x)=f(x-1)$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

$\text{دامنهٔ}\ g=[-1,3]$

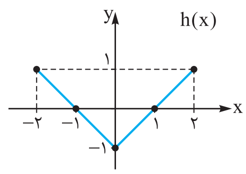
$\text{برد}\ g=\text{برد}\ f=[0,2]$



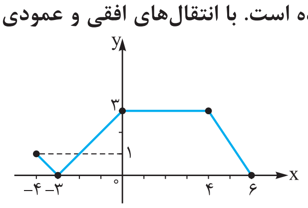
برای رسم تابع $h(x)=f(x)-1$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین در راستای قائم انتقال دهیم.

$\text{دامنهٔ}\ h=\text{دامنهٔ}\ f=[-2,2]$

$\text{برد}\ h=[-1,1]$



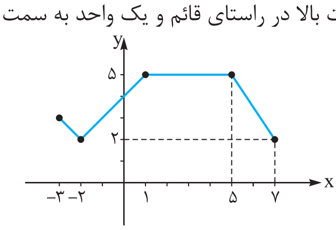
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=f(x-1)+2$ را رسم کنید.



پاسخ: باید نمودار اولیه را دو واحد به سمت بالا در راستای قائم و یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

$\text{دامنهٔ جدید}=[-3,7]$

$\text{برد جدید}=[2,5]$

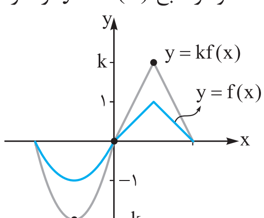


انبساط و انقباض عمودی

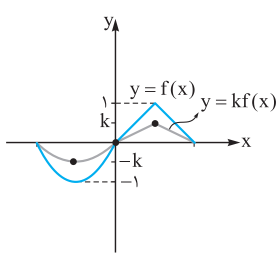
برای رسم نمودار $y=kf(x)$، باید عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار انبساط عمودی در راستای محور yها و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار انقباض عمودی در راستای محور yها دارد.

$k>1 \Rightarrow$ انبساط عمودی داریم



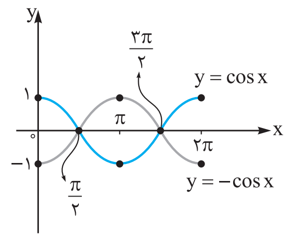
$0<k<1 \Rightarrow$ انقباض عمودی داریم



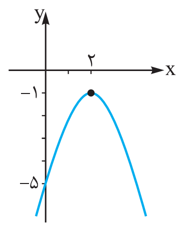
تذکر: در حالتی که $k=-1$ باشد، نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها است.

مثال قرینهٔ نمودار تابع $y=\cos x$ را نسبت به محور xها در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس برای رسم قرینهٔ آن، نسبت به محور xها یعنی $y=-\cos x$، نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



مثال نمودار زیر از قرینه‌یابی نسبت به محور xها و انتقال نمودار تابع $y=x^2$ به دست آمده است. ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

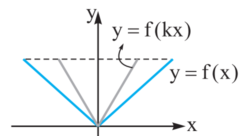


پاسخ با توجه به نمودار، تابع $y=x^2$ نسبت به محور xها قرینه شده، دو واحد به سمت راست و یک واحد پایین آمده است، پس ضابطه‌اش به صورت $y=-(x-2)^2-1$ است.

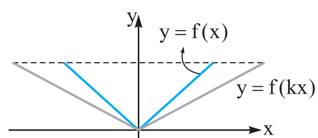
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، باید طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور xها و اگر $0<k<1$ باشد، انبساط افقی در راستای محور xها داریم.



$k>1$ (انقباض)



$0<k<1$ (انبساط)

تذکر نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها است.

نکتهٔ مهم برای بررسی تابع $g(x)=af(bx+c)+d$ از روی نمودار $f(x)$، باید به ترتیب c (انتقال افقی)، b (انبساط و انقباض افقی)، a (انبساط و انقباض عمودی) و در نهایت d (انتقال عمودی) را انجام دهیم.

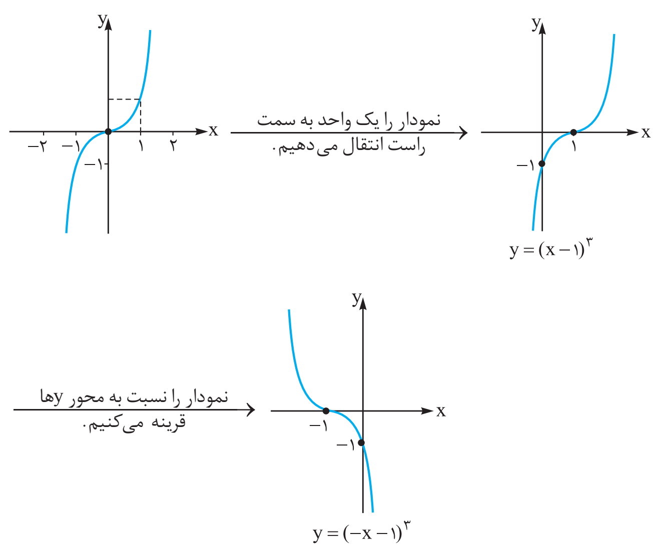
مثال نمودار تابع $y=(-x-1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنید.

پاسخ

$y=x^3$

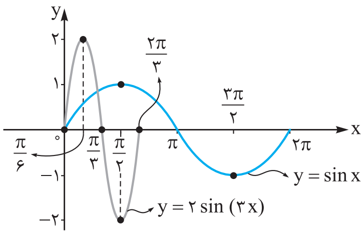
x	-1	0	1
y	-1	0	1

ابتدا نمودار $y=x^3$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست می‌بریم و در نهایت آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

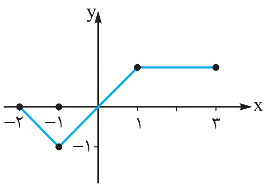


مثال به کمک نمودار تابع $y=\sin x$، نمودار تابع $y=2\sin(3x)$ را رسم کنید.

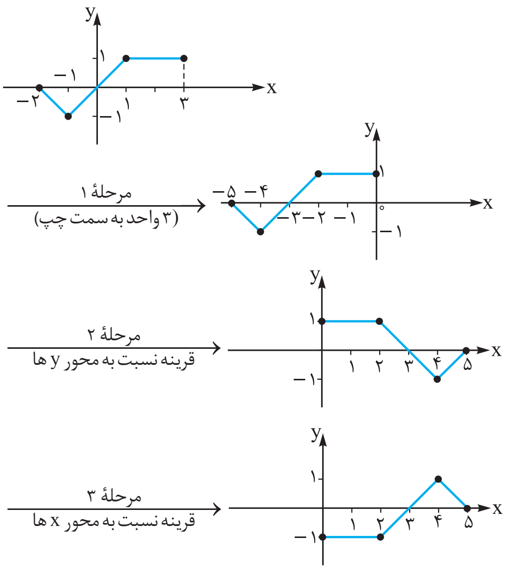
پاسخ ضریب ۲ باعث می‌شود که نمودار اولیه انبساط عمودی (انبساط در راستای محور yها) داشته باشد، همچنین ضریب ۳ برای x باعث می‌شود نمودار اولیه انقباض افقی (در راستای محور xها) داشته باشد.



مثال نمودار $f(x)$ در مقابل رسم شده است. نمودار $y=-f(3-x)$ را رسم کنید.



پاسخ مراحل رسم: ۱- نمودار را ۳ واحد به سمت چپ می‌بریم. ۲- نمودار مرحلهٔ ۱ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. ۳- نمودار مرحلهٔ ۲ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا، بخش‌پذیری و تقسیم

تابع چندجمله‌ای درجهٔ n

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$ آن‌گاه تابع $f(x)$ زیر، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نامیده می‌شود.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\ ,\ a_n\neq 0$$

در حالت‌های خاص:

۱) $n=0 \Rightarrow f(x)=c$ (تابع ثابت)

۲) $n=1 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax+b \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع خطی درجه‌اول)

۳) $n=2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع درجهٔ ۲ سهمی)

۴) $n=3 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع درجهٔ ۳)

مثال درجهٔ چندجمله‌ای زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=(x-1)^2x^3$

ب) $g(x)=(x-2)^2+1$

پ) $h(x)=3$